SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Annamaria Montanari

DISUGUAGLIANZA DI HARNACK PER UNA CLASSE DI OPERATORI ULTRAPARABOLICI TOTALMENTE DEGENERI

6 aprile 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Riassunto. Consideriamo una classe di operatori ipoellittici totalmente degeneri del tipo

$$L = \operatorname{div}(A(t)D) + < x, BD > -\partial_t,$$

dove $A(t)$ è una matrice simmetrica semidefinita positiva e B è una matrice costante a coefficienti reali.

Per gli operatori L dimostriamo una disuguaglianza di Harnack non invariante utilizzando particolari formule di media.

Successivamente supponiamo $A(t) = t^{2m}A$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e A matrice costante a coefficienti reali. Introduciamo poi delle ipotesi sulle matrici A e B che assicurino l'invarianza di L rispetto ad un gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$. Utilizzando allora il metodo di Nash mostriamo come si possa ottenere una disuguaglianza di Harnack, invariante rispetto al gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$, per le soluzioni non negative di $Lu = 0$.

Abstract. We consider a class of totally degenerate hypoelliptic operators of the following type

$$L = \operatorname{div}(A(t)D) + < x, BD > -\partial_t,$$

where $A(t)$ is a symmetric and positive semidefinite matrix and B is a constant real matrix.

For the operator L we show a non invariant Harnack inequality based on some mean value formulas.

Next we suppose $A(t) = t^{2m}A$ with $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and introduce further hypotheses on the matrices A and B which assure the invariance of L with respect to a group of dilations $(D(\lambda))_{\lambda>0}$. Then, using the method of Nash, we show how to obtain an invariant Harnack inequality for the non negative solutions of $Lu = 0$.

§1. Introduzione.

In questa nota dimostriamo una disuguaglianza di Harnack uniforme valida per operatori totalmente degeneri di tipo Kolmogorov e Fokker-Planck.

In $\mathbb{R}^{N+1}$ consideriamo l'operatore ipoellittico

$$L = \operatorname{div}_x (A(t)D_x) + \langle x, BD_x \rangle - \partial_t, \tag{1.1}$$

dove $(x,t) = (x_1, ..., x_N, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $A(t)$ è una matrice $N \times N$ simmmetrica semidefinita positiva, B è una matrice costante di dimensione $N \times N$; $\operatorname{div}_x(\cdot)$, $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indicano rispettivamente la divergenza, il gradiente ed il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$. Supporremo sempre che esista una matrice $\gamma(t)$ a coefficienti C^∞ tale che $A(t) = \gamma(t)\gamma^T(t)$.

Posto

$$E(s) = \exp(-sB^T) \tag{1.2}$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$, la condizione di ipoellitticità si traduce, in termini delle matrici $A(t)$ e B, come segue:

Ipotesi H.1. *Esiste un $\sigma \in \mathbb{N}$ tale che esistono N vettori linearmente indipendenti tra le colonne delle matrici*

$$(E(s)\gamma(t-s))_{s=0}, (E(s)\gamma(t-s))'_{s=0}, ..., (E(s)\gamma(t-s))^{(\sigma)}_{s=0}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Questa condizione è equivalente all'ipotesi di Hörmander che sia massimo, in ogni punto di $\mathbb{R}^{N+1}$, il rango dell'algebra di Lie generata dai vettori riga della matrice $\gamma(t)$ e da $Y = \langle x, BD_x \rangle - \partial_t$.

Osserviamo che la condizione H.1 non esclude il caso di operatori totalmente degeneri, quali l'operatore del calore degenere

$$t^{2m}\Delta_x - \partial_t, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

e l'operatore di Kolmogorov degenere

$$t^{2m}\Delta_x + \sum_{j=1}^{p_0} x_j \partial_{y_j} - \partial_t, \quad (x,y,t) \in \mathbb{R}^{p_0} \times \mathbb{R}^{p_0} \times \mathbb{R}\,.$$

Nel 1984 Chiarenza e Serapioni [CS] hanno dimostrato un principio di Harnack valido per le soluzioni deboli e positive di equazioni paraboliche degeneri, dove però la degenerazione viene controllata da un opportuno peso A_p. I loro risultati sono stati successivamente migliorati ed estesi da altri autori, ma la degenerazione consentita è sempre almeno localmente sommabile. La novità dei risultati che presenteremo in questa nota consiste in una disuguaglianza di Harnack invariante per operatori con parte principale totalmente degenere, in quanto la degenerazione è controllata da una potenza di t di ordine fissato ma arbitrario.

Sotto l'ipotesi H.1 dimostreremo, nel paragrafo 3, dapprima una disuguaglianza di Harnack in forma integrale che estende a questo contesto un precedente risultato di Bony relativo al caso non degenere [B]. Successivamente, a partire da opportune formule di media, dimostreremo una disuguaglianza di Harnack puntuale, *non invariante*, per le soluzioni non negative di $Lu = 0$.

Nei successivi paragrafi 4 e 5 considereremo operatori (1.1) di tipo particolare. Supporremo che le matrici $A(t)$ e B verifichino l'ipotesi

Ipotesi H.2.

$$A(t) = t^{2m}A, \qquad A = \begin{pmatrix} A_0 & \vartheta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dove $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, A_0 *è una matrice non singolare di rango* p_0, B_j *è un blocco* $p_{j-1} \times p_j$ *di rango massimo* $p_j, j = 1, 2, ..., r$, *con* $p_0 \geq p_1 \geq ... \geq p_r \geq 1$ *e* $p_0 + p_1 + ... + p_r = N$.

Nel paragrafo 4 studieremo il primo problema di valori al contorno relativo ad una particolare famiglia di aperti: posto

$$D_0(\lambda) = \lambda^{2m}\text{diag}\,(\lambda I_{p_0}, ..., \lambda^{2r+1} I_{p_r}), \lambda > 0, \tag{1.4}$$

definiamo per ogni $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $T > \tau$ gli *aperti cilindrici*

(1.5)

$$\Omega_R(\xi, \tau; T) = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \tau < t < T, \left| D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-t)x - E(-\tau)\xi) \right| < 1 \right\}$$

e chiamiamo *bordo regolare* di $\Omega_R(\xi, \tau; T)$ l'insieme

$$\partial_r \Omega_R(\xi, \tau; T) = \partial\Omega_R(\xi, \tau; T) \setminus \{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : t = T\}. \tag{1.6}$$

Mostreremo che, per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega_R(\xi, \tau; T))$, esiste un'unica soluzione $u \in C^\infty(\Omega_R(\xi, \tau; T)) \cap C(\partial_r \Omega_R(\xi, \tau; T))$ del problema

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega_R(\xi, \tau; T) \\ u_{|\partial_r \Omega_R(\xi, \tau; T)} = \varphi. \end{cases} \tag{1.7}$$

Utilizzando allora il metodo di Nash [N], ripreso da Fabes e Stroock in [FS], nel paragrafo 5 mostreremo come si possa ottenere una disuguaglianza di Harnack, per le soluzioni non negative di $Lu = 0$ in $\Omega_R(\xi, \tau; T)$, *invariante* rispetto al gruppo dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0} = (D_0(\lambda), \lambda^2)_{\lambda>0}$. Questo risultato viene enunciato nel Teorema 5.1.

§2. Preliminari.

Se l'operatore L verifica l'ipotesi H.1 allora si può costruire esplicitamente la soluzione fondamentale $\Gamma(x, t; y, \tau)$, con polo $(y, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$, risolvendo formalmente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Lu(x,t) = 0 & t > \tau \\ u(x, \tau) = \varphi(x) & \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{2.1}$$

Posto

$$C(\tau, t) = \int_0^{t-\tau} E(s)A(t-s)E^T(s)ds, \tag{2.2}$$

per l'ipotesi di ipoellitticità H.1 la matrice $C(\tau,t)$ risulta definita positiva per $t>\tau$ e la funzione

(2.3)

$$\Gamma(x,t;y,\tau)=\begin{cases}\dfrac{(4\pi)^{-N/2}}{\sqrt{\det C(\tau,t)}}\exp\left(-\dfrac{1}{4}\left\langle C^{-1}(\tau,t)\left(x-E(t-\tau)y\right),x-E(t-\tau)y\right\rangle\right) & \text{per } t>\tau\\ 0 \quad \text{per } t\le\tau & \end{cases}$$

è soluzione fondamentale di L con polo in (y,τ).

La soluzione fondamentale esplicita per gli operatori ipoellittici (1.1) è stata scritta per la prima volta da Kuptsov [K1].

La forma esplicita della soluzione fondamentale permette di ottenere, con un metodo standard a partire dall'identità di Green, la seguente formula di media per le soluzioni di $Lu=0$:

Proposizione 2.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $u\in C^\infty(\Omega)$ una soluzione di $Lu=0$ in Ω. Per ogni $z_0\in\Omega$ e per ogni $r>0$ definiamo gli insiemi di livello della soluzione fondamentale*

$$\Omega_r(z_0)=\left\{z\in\mathbb{R}^{N+1}\colon \Gamma(z_0;z)>\frac{1}{r}\right\}. \tag{2.4}$$

Allora per ogni $z_0\in\Omega$ e per ogni $r>0$ tale che $\overline{\Omega_r(z_0)}$ sia compatto e contenuto in Ω, risulta

$$u(z_0)=\frac{1}{r}\int_{\Omega_r(z_0)} M(z_0;z)u(z)dz, \tag{2.5}$$

dove

$$M(z_0;z)=\frac{\langle A(t)D_x\Gamma(z_0;z),D_x\Gamma(z_0;z)\rangle}{\Gamma^2(z_0;z)}. \tag{2.6}$$

Formule di media per le soluzioni di equazioni del tipo da noi considerato sono state provate da Kuptsov [K2].

Se le matrici $A(t)$ e B in (1.1) verificano l'ipotesi H.2 allora risulta (cfr. [LP]):

$$E(\lambda^2t)=D_0(\lambda)E(t)D_0\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{2.7}$$

per ogni $\lambda>0$. Utilizzando (2.2) e (2.7) si riconosce facilmente che vale anche

$$C(\lambda^2\tau,\lambda^2t)=D_0(\lambda)C(\tau,t)D_0(\lambda), \tag{2.8}$$

per ogni $\lambda>0$.

§3. Disuguaglianze di Harnack non invarianti.

Sia L un operatore ipoellittico del tipo (1.1). Il teorema seguente costituisce un'estensione di un risultato di Bony relativo ad operatori con parte principale non totalmente degenere [B].

Teorema 3.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia T un insieme denso in Ω. Allora per ogni K compatto e contenuto in Ω, esistono $z_1, ..., z_p \in T$ ed una costante c positiva tale che*

$$\int_K u(z)dz \leq c(u(z_1) + ... + u(z_p)), \tag{3.1}$$

per ogni $u \in C^\infty(\Omega)$ soluzione non negativa di $Lu = 0$ in Ω.

Dimostrazione. Per ogni $\zeta \in$ K esiste $z_0 = z_0(\zeta) \in \Omega$ ed esistono $r = r(\zeta) > 0$ e $\rho = \rho(\zeta) > 0$ tali che $\Omega_r(z_0)$ sia un aperto relativamente compatto in Ω e

$$B(\zeta, \rho) \subset \Omega_r(z_0) \setminus \left\{ (x,t) \in \Omega_r(z_0) : A(t)\frac{D_x\Gamma(z_0;z)}{\Gamma(z_0;z)} = 0 \right\}.$$

Allora $M(z_0;z)_{|B(\zeta,\rho)} > 0$. Per ragioni di continuità e per la densità di T in Ω, si può scegliere $z_0 \in T$.

Osserviamo che $(B(\zeta, \rho(\zeta)))_{\zeta \in K}$ è un ricoprimento aperto di K, allora esistono $\zeta_1, ..., \zeta_p \in$ K e $\rho_1 = \rho(\zeta_1), ..., \rho_p = \rho(\zeta_p) \in \mathbb{R}^+$ tali che, posto $B_i = B(\zeta_i, \rho_i)$ per $i = 1, ..., p$, K$\subset \bigcup_{i=1}^{p} B_i$. Esistono allora $z_1, ..., z_p \in$T e $r_1, ..., r_p > 0$ tali che $\overline{\Omega_{r_i(z_i)}} \subset\subset \Omega$ e $\inf_{z \in B_i} (M(z_i;z)) > 0$. Dunque

$$u(z_i) = \frac{1}{r_i} \int_{\Omega_{r_i}(z_i)} M(z_i;z)u(z)dz \geq \frac{\inf_{z \in B_i} (M(z_i;z))}{r_i} \int_{B_i} u(z)dz.$$

Posto $\frac{1}{c} = \inf \left\{ \frac{\inf_{z \in B_i} (M(z_i;z))}{r_i}, i = 1, ..., p \right\}$ risulta

$$\sum_{i=1}^{p} u(z_i) \geq \sum_{i=1}^{p} \frac{\inf_{z \in B_i} (M(z_i;z))}{r_i} \int_{B_i} u(z)dz \geq \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{p} \int_{B_i} u(z)dz$$

e dunque

$$\int_K u(z)dz \leq \sum_{i=1}^{p} \int_{B_i} u(z)dz \leq c \sum_{i=1}^{p} u(z_i).$$

Proposizione 3.1. *Sia $(u_n)_{n \geq 1}$ una successione di soluzioni di $Lu = 0$, tale che $u_n \leq u_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia poi u il limite puntuale della successione $(u_n)_{n \geq 1}$ e supponiamo $u < \infty$ in ogni punto di un insieme denso in Ω. Allora $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $n > m$, allora $u_n - u_m \geq 0$ e quindi per il Teorema 3.1

$$\int_K (u_n(z) - u_m(z))dz \leq \sum_{j=1}^{p} (u_n(z_j) - u_m(z_j)) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0.$$

Dunque u_n è una successione di Cauchy in $L^1_{loc}(\Omega)$. Inoltre per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega (Lu)\varphi dz = \int_\Omega u(L^*\varphi)dz = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j(L^*\varphi)dz = 0,$$

dunque $Lu = 0$ in Ω nel senso delle distribuzioni e, per l'ipoellitticità di L, esiste $v \in C^\infty(\Omega)$ tale che $v = u$ quasi dappertutto. Ragioniamo ora per assurdo e supponiamo che esista un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\sup_K u = +\infty$. Per ogni $M > 0$ esiste allora $y \in K$ tale che $u(y) > M$. Ma poiché u è il limite puntuale di una successione monotona crescente di funzioni continue, u è inferiormente semicontinua. Di conseguenza esiste un intorno V di y tale che $u(z) > M$ per ogni $z \in V$. Quindi esiste $z \in V$ tale che $v(z) = u(z) > M$. Questo proverebbe che $\sup_K v = +\infty$. Ma questo è assurdo, perché $v \in C^\infty(\Omega)$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, $\varepsilon < (4\pi)^{-N}$, poniamo

$$K_r(z_0) = \Omega_r(z_0) \cap \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \varepsilon r^2 \le \det C(t,t_0)\right\}. \tag{3.2}$$

Vale allora il seguente teorema:

Teorema 3.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$. Allora per ogni fissato $\varepsilon > 0$ e per ogni $z_0 \in \Omega$ ed $r > 0$ tali che $\overline{\Omega_{2r}(z_0)} \subset\subset \Omega$, esiste una costante $c = c(\varepsilon, z_0, r) > 0$ tale che*

$$\sup_{K_r(z_0)} u \le cu(z_0), \tag{3.3}$$

per ogni $u \in C^\infty(\Omega)$ soluzione non negativa di $Lu = 0$ in Ω.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la (3.3) non sia vera. Allora esiste $u_n \in C^\infty(\Omega)$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $u_n \ge 0$ e

$$\sup_{K_r(z_0)} u_n > 4^n c u_n(z_0). \tag{3.4}$$

Osserviamo che $u_n(z_0) \ne 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, altrimenti per la formula di media dovrebbe essere $u_n \equiv 0$ in $\Omega_{2r}(z_0)$. Possiamo quindi definire le seguenti funzioni

$$w_n(z) = \frac{u_n(z)}{u_n(z_0)}, \qquad w(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{w_n(z)}{2^n}$$

e porre $T = \{z \in \Omega : w(z) < +\infty\}$. L'insieme T è non vuoto in quanto $w(z_0) = 1$, inoltre T è denso in $\Omega_{2r}(z_0)$. Se infatti T non fosse denso esisterebbero $z \in \Omega_{2r}(z_0)$ e $\rho > 0$ tali che $w_{|B(z,\rho)} \equiv +\infty$. Di conseguenza, poiché $M(z_0; z) > 0$ quasi dappertutto,

$$\int_{\Omega_{2r}(z_0)} M(z_0;z)w(z)dz = \sum_{n=1}^\infty \frac{w_n(z_0)}{2^n} = 1.$$

Possiamo allora applicare la Proposizione 3.1 alla successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(z)}{2^n}$ e concludere che $w \in L^{\infty}_{loc}(\Omega_{2r}(z_0))$. In particolare w è limitata in $K_r(z_0)$. D'altra parte, per la (3.4)

$$\sup_{K_r(z_0)} w \geq \frac{1}{2^n} \sup_{K_r(z_0)} w_n \geq 2^n$$

e questa contraddizione prova il teorema.

§4. La funzione di Green per gli aperti $\Omega_R(\xi, \tau; T)$.

Sia L un operatore del tipo (1.1) tale che le matrici $A(t)$ e B verifichino l'ipotesi H.2.

Per ogni $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $T > \tau$ definiamo

$$V = V(\xi, \tau; T) = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \tau < t < T, |x - \xi| < t - \tau\right\}, \tag{4.1}$$

$$\partial_r V = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \tau \leq t < T, |x - \xi| = t - \tau\right\}. \tag{4.2}$$

Per ogni $\varphi \in C(\partial_r V)$ esiste un'unica soluzione $H^V_\varphi \in C^\infty(V) \cap C(V \cup \partial_r V)$ tale che $LH^V_\varphi = 0$ in V e

$$\lim_{\substack{(x,t) \to (x_0,t_0) \\ (x,t) \in V}} H^V_\varphi(x,t) = \varphi(x_0, t_0)$$

per ogni $(x_0, t_0) \in \partial_r V$.

Diciamo allora che V è un aperto *quasi regolare*.

Sia ora $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un aperto limitato arbitrario.

Definizione 4.1. *Una funzione $\omega : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è $L-$superarmonica in Ω se*

(i) $-\infty < \omega \leq \infty, \omega < \infty$ *in un sottoinsieme denso di* Ω;

(ii) ω *è inferiormente semicontinua;*

(iii) *per ogni V aperto quasi regolare tale che $\overline{V} \subset \Omega$ e per ogni $\varphi \in C(\partial V)$, se $\omega_{|\partial_r V} \geq \varphi$ allora $\omega \geq H^V_\varphi$ in V.*

Per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ cerchiamo una soluzione $u \in C^\infty(\Omega)$ del primo problema di valori al contorno

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{4.3}$$

Il metodo di Perron-Wiener-Brelot-Bauer (cfr. [Ba]), opportunamente adattato alla base di aperti *quasi regolari* $\left\{V(\xi, \tau; T) : (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1}, T > \tau\right\}$, assicura l'esistenza di una *soluzione generalizzata* del problema (4.3):

$$H^\Omega_\varphi = \inf\left\{\omega : \omega \text{ è } L - \text{superarmonica in } \Omega \text{ e } \liminf \omega \geq \varphi\right\}. \tag{4.4}$$

Con i metodi classici della teoria del potenziale si dimostra che $H^\Omega_\varphi \in C^\infty(\Omega)$ e $LH^\Omega_\varphi = 0$ in senso classico.

In generale però la funzione H^Ω_φ definita in (4.4) non assume il dato al bordo con continuità.

Definizione 4.2. *Un punto $(x_0, t_0) \in \partial\Omega$ è $L-$regolare se*

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0)\\(x,t)\in V}} H_\varphi^V(x,t) = \varphi(x_0,t_0) \tag{4.5}$$

per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Proposizione 4.1. *I punti $z_0 = (x_0, t_0) \in \partial\Omega_R(\xi,\tau;T)$ tali che $\tau \le t_0 \le T$, $\left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-t_0)x_0 - E(-\tau)\xi)\right| = 1$ sono $L-$regolari per $\Omega_R(\xi,\tau;T)$.*

Dimostrazione. Poniamo

$$\omega(z) = 1 - \left\langle D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-t)x - E(-\tau)\xi), D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-t_0)x_0 - E(-\tau)\xi)\right\rangle. \tag{4.6}$$

Per ogni $z \in \Omega_R(\xi,\tau;T)$ risulta

$$\omega(z) \ge 1 - \left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-t)x - E(-\tau)\xi)\right| > 0,$$

$\omega(z_0) = 0$ e per ogni $z \in \Omega_R(\xi,\tau;T)$ risulta

$$\begin{aligned} L\omega(z) = &-\left\langle x, BE^T(-t)D_0\left(\frac{1}{R}\right)(E(-t_0)x_0 - E(-\tau)\xi)\right\rangle \\ &+ \left\langle x, BE^T(-t)D_0\left(\frac{1}{R}\right)(E(-t_0)x_0 - E(-\tau)\xi)\right\rangle \equiv 0; \end{aligned}$$

allora ω è una barriera per $\Omega_R(\xi,\tau;T)$ in z_0. Per il Teorema di Bouligand z_0 è un punto $L-$regolare per $\Omega_R(\xi,\tau;T)$.

Per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ tale che $\left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-\tau)y - E(-\tau)\xi)\right| < 1$ e per ogni $(x,t) \in \Omega_R(\xi,\tau;T)$ definiamo

$$\Gamma^{(\xi,\tau;R)}(x,t;y,\tau) = \Gamma(x,t;y,\tau) - h(x,t;y,\tau) \tag{4.7}$$

dove $\Gamma(\cdot,\cdot;y,\tau)$ è la soluzione fondamentale di L con polo (y,τ) e $h(\cdot,\cdot;y,\tau)$ indica la soluzione del problema al contorno

$$\begin{cases} Lu = 0 \quad \text{in } \Omega_R(\xi,\tau;T) \\ u(x,\tau) = 0 \quad \text{per } \left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-\tau)x - E(-\tau)\xi)\right| < 1 \\ u(x,t) = \Gamma(x,t;y,\tau) \quad \text{per } \left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-t)x - E(-\tau)\xi)\right| = 1, \tau < t. \end{cases} \tag{4.8}$$

Osserviamo che il problema (4.8) è ben posto in quanto per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che $\left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-t)x - E(-\tau)\xi)\right| = 1$, $\tau < t \le T$ ed y tale che $\left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-\tau)y - E(-\tau)\xi)\right| < 1$, risulta $E(-t)x \ne E(-\tau)y$ e dunque

$$\lim_{t\to\tau} \Gamma(x,t;y,\tau) = 0.$$

Per ogni $(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^{N+1}, T>\tau$ e $R>0$ chiamiamo $\Gamma^{(\xi,\tau;R)}(x,t;y,\tau)$ la *funzione di Green* di $Lu=0$ in $\Omega_R(\xi,\tau;T)$.

Come nel caso parabolico (cfr. [F]) risulta che per ogni funzione continua f a supporto compatto in $S(\xi,\tau;R)=\left\{x\in\mathbb{R}^N\colon \left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-\tau)x-E(-\tau)\xi)\right|<1\right\}$, la funzione

$$u(x,t)=\int\limits_{S(\xi,\tau;R)}\Gamma^{(\xi,\tau;R)}(x,t;y,\tau)f(y)dy \tag{4.9}$$

è una soluzione di $Lu=0$ in $\Omega_R(\xi,\tau;T)$ e soddisfa la condizione iniziale

$$\lim_{t\to\tau^+}u(x,t)=f(x)\quad \text{per } x\in\overline{S(\xi,\tau;R)} \tag{4.10}$$

e la condizione al bordo

$$u(x,t)=0\quad \text{per } \left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)(E(-t)x-E(-\tau)\xi)\right|=1, \tau<t\le T. \tag{4.11}$$

Osserviamo che se $v\in C^\infty\left(\overline{\Omega_R(\xi,\tau;T)}\right)$ è una soluzione non negativa di $Lu=0$ in $\Omega_R(\xi,\tau;T)$ allora, per il principio del massimo, risulta

$$v(x,t)\ge\int\limits_{S(\xi,\tau;R)}\Gamma^{(\xi,\tau;R)}(x,t;y,\tau)v(y,\tau)dy \tag{4.12}$$

per ogni $(x,t)\in\Omega_R(\xi,\tau;T)$.

§5. Disuguaglianza di Harnack invariante.

Per ogni $(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^{N+1}, T>\tau$ e $R>0$ sia $\Gamma^{(\xi,\tau;R)}(x,t;y,\tau)$ la *funzione di Green* di $Lu=0$ in $\Omega_R(\xi,\tau;T)$.

Vale allora il seguente risultato:

Lemma 5.1. *Per ogni $\beta\in\mathbb{R}$ e per $\alpha,\gamma,\delta\in(0,1), 0<\alpha<\gamma<1$, esiste una costante positiva $\varepsilon=\varepsilon(\beta,\alpha,\gamma,\delta)$ tale che per ogni $R>0$*

$$\Gamma^{(\xi,\tau;R)}(x,t;y,\tau)\ge\frac{\varepsilon}{R^{Q/2}}, \tag{5.1}$$

dove

$$Q=(2m)N+(1+3+\ldots+(2r+1)),$$

per $\tau\in[\beta R,(\beta+\alpha)R]$, per ogni y tale che $\left|D_0\left(\frac{1}{\sqrt{\delta R}}\right)(E(-\tau)x-E(-\tau)\xi)\right|<1$ e per ogni $(x,t)\in\Omega_{\delta R}(\xi,\tau;(\beta+1)R)\cap\{(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}\colon(\beta+\gamma)\le\frac{t}{R}\le(\beta+1)\}$.

Per ogni $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}, 0<\alpha<\gamma<1$ e $\delta\in(0,1)$ siano

$$Q^-=\Omega_{\delta R}(\xi,(\beta-1)R;(\beta+1)R)\cap\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}\colon(\beta-\gamma)\le\frac{t}{R}\le(\beta-\alpha)\right\}, \tag{5.2}$$

$$Q^+=\Omega_{\delta R}(\xi,(\beta-1)R;(\beta+1)R)\cap\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}\colon(\beta+\alpha)\le\frac{t}{R}\le(\beta+\gamma)\right\}. \tag{5.3}$$

Il risultato principale di questa nota consiste nel seguente teorema:

Teorema 5.1. *Esiste una costante positiva $M = M(\alpha, \beta, \gamma, \delta) < \infty$ tale che per ogni $R > 0$*

$$\max_{\overline{Q^-}} u \leq M \min_{\overline{Q^+}} u \tag{5.4}$$

per ogni soluzione non negativa $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega_R(\xi, (\beta-1)R; (\beta+1)R)}\right)$ di $Lu = 0$ in $\Omega_R(\xi, (\beta-1)R; (\beta+1)R)$.

Dimostrazione. Non diamo in questa sede una prova completa del Teorema 5.1, ma vogliamo soltanto indicare come si possa dedurre dalla formula di rappresentazione (4.12) e dalla stima dal basso (5.1) della *funzione di Green.*

Poniamo $t_0 = \beta R$. Sia $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{Q^+}$ tale che $\min_{\overline{Q^+}} = u(\bar{x}, \bar{t})$. Posto

$$S(E(R)\xi, t_0; \delta R) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \left| D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\delta R}} \right) (E(-t_0)x - E(-(\beta-1)R)\xi) \right| < 1 \right\},$$

per (4.12) e (5.1) risulta

$$u(\bar{x}, \bar{t}) \geq \int_{S(E(R)\xi, t_0; \delta R)} \Gamma^{(E(R)\xi, t_0; R)}(\bar{x}, \bar{t}; y, t_0) u(y, t_0) dy \geq \frac{\varepsilon}{R^{Q/2}} \int_{S(E(R)\xi, t_0; \delta R)} u(y, t_0) dy.$$

In particolare esiste $x_0 \in S(E(R)\xi, t_0; \delta R)$ tale che

$$u(x_0, t_0) \leq \frac{1}{\varepsilon \delta^{Q/2}} \min_{\overline{Q^+}} u.$$

Non è restrittivo supporre $u(x_0, t_0) = 1$. Allora per ogni $r \in [t_0 - \gamma R, t_0 - \alpha R]$ posto $S(E(r-(\beta-1)R)\xi, r; \delta R) = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \left| D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\delta R}} \right) (E(-r)y - E(-(\beta-1)R)\xi) \right| < 1 \right\}$ risulta, per (4.12) e (5.1),

$$\begin{aligned} 1 \geq & \int_{S(E(r-(\beta-1)R)\xi, r; \delta R)} \Gamma^{(E(r-(\beta-1)R)\xi, r; R)}(x_0, t_0; y, r) u(y, r) dy \\ & \geq \frac{\varepsilon}{R^{Q/2}} \int_{S(E(r-(\beta-1)R)\xi, r; \delta R)} u(y, r) dy. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Utilizzando la disuguaglianza (5.5) si dimostra che esiste una costante positiva $K = K(\alpha, \beta, \gamma, \delta) < \infty$ tale che

$$u(y, \tau) \leq K, \tag{5.6}$$

per ogni $(y, \tau) \in \overline{Q^-}$. Non riportiamo la dimostrazione dell'affermazione precedente in quanto essa si ottiene adattando un laborioso procedimento indicato da Fabes e Stroock per lo studio del caso parabolico (cfr. [FS]). Dall'ultima disuguaglianza, posto $M = \frac{K}{\varepsilon \delta^{Q/2}}$, risulta infine

$$\max_{\overline{Q^-}} u \leq K \leq M \min_{\overline{Q^+}} u.$$

BIBLIOGRAFIA

[Ba] H. Bauer, *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie*, Lecture Notes in Math **22** (1966).

[B] J. -M. Bony, *Principe de maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **19,1** (1969), 277–304.

[CS] F. Chiarenza, R. Serapioni, *A Harnack inequality for degenerate parabolic equations*, Comm. in partial diff. equations **9** (1984), 719–749.

[FS] E. Fabes, D. W. Stroock, *A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash*, Arch. Rational Mech. Anal. **96** (1986), 327–338.

[F] A. Friedman, *Partial differantial equations of parabolic type*, Prentice-Hall, New York (1964).

[K1] L. P. Kuptsov, *Fundamental solutions for a class of second-order elliptic-parabolic equations*, Differentcial'nye Uravnenija **8** (1972), 1649–1660English Transl, Differential Equations **8** (1972), 1269–1278.

[K2] —, *A property of mean for a generalized A. N. Kolmogorov equation*, Differentcial'nye Uravnenija **19** (1983), 295–304English Transl., Differential Equations **19** (1983), 222–230.

[LP] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **51,4** (1993), 137–171.

[N] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. **80** (1958), 931–954.